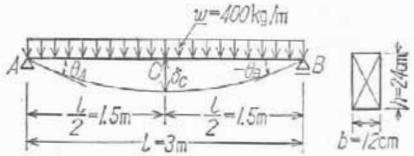
第 7～9 回　静定梁の変形、モールの定理

演 習 問 題

問題 1.　2·8 図のように，単純ばりの全スパンに等分布荷重が作用しているとき，はりの中央 C 点のたわみ δ_C と，A，B 支点のたわみ角 θ_A および θ_B を求めよ．ただし，はりのヤング係数を E=90000kg/cm^2 とする．



2·8 図

〔解〕 まず，このはりの断面 2 次モーメントを求め，次いで 2·1 表から公式を適用すればよい．よって，このはりの断面 2 次モーメントは

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{12\times24^3}{12}=13824\ \mathrm{cm}^4$$

ここで，計算の単位を kg と cm に統一して

$$w=400\ \mathrm{kg/m}=400\ \mathrm{kg}/100\ \mathrm{cm}=4\ \mathrm{kg/cm}$$

$$l=3\ \mathrm{m}=300\ \mathrm{cm}$$

これから，このはりの C 点のたわみは

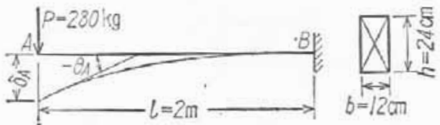
$$\delta_C=\frac{5wl^4}{384EI}=\frac{5\times4\times300^4}{384\times90000\times13824}\fallingdotseq0.339\ \mathrm{cm}\ \text{（下向き）}$$

はりの両支点のたわみ角は

$$\theta_A=\frac{wl^3}{24EI}=\frac{4\times300^3}{24\times90000\times13824}\fallingdotseq0.00362\ \text{ラジアン（時計回り）}$$

$$\theta_B=-\frac{wl^3}{24EI}\fallingdotseq-0.00362\ \text{ラジアン（反時計回り）}$$

問題 2.　2·9 図のように，片持ちばりの先端に集中荷重が作用しているとき，自由端 A 点のたわみ δ_A とたわみ角 θ_A とを求めよ．ただし，はりの材料はまつでそのヤング係数は E=90000 kg/cm^2 とする．



2·9 図

〔解〕 まず，このはりの断面 2 次モーメントを求め，次いで 2·1 表から公式を適用すればよい．よって，このはりの断面 2 次モーメントは

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{12\times24^3}{12}=13824\ \mathrm{cm}^4$$

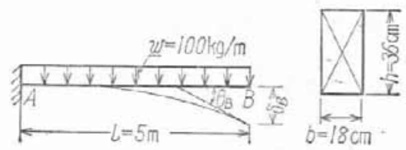
ここで，l=2 m=200 cm となるから，A 点のたわみは

$$\delta_A=\frac{Pl^3}{3EI}=\frac{280\times200^3}{3\times90000\times13824}\fallingdotseq0.600\ \mathrm{cm}\ \text{（下向き）}$$

A 点のたわみ角は

$$\theta_A=-\frac{Pl^2}{2EI}=-\frac{280\times200^2}{2\times90000\times13824}\fallingdotseq-0.00450\ \text{ラジアン（反時計回り）}$$

問題 3.　2·10 図における B 点のたわみ δ_B と，たわみ角 θ_B とを求めよ．ただし，はり材料のヤング係数を E=70000 kg/cm^2 とする．



2·10 図

〔解〕 はりの断面 2 次モーメントを求め，2·1 表から公式を適用する．よって，このはりの断面 2 次モーメントは

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{18\times36^3}{12}=69984\ \mathrm{cm}^4$$

ここで

$$w=100\ \mathrm{kg/m}=100\ \mathrm{kg}/100\ \mathrm{cm}=1\ \mathrm{kg/cm}$$

$$l=5\ \mathrm{m}=500\ \mathrm{cm}$$

となるから，B 点のたわみは

$$\delta_B=\frac{wl^4}{8EI}=\frac{1\times500^4}{8\times70000\times69984}\fallingdotseq1.595\ \mathrm{cm}\ \text{（下向き）}$$

B 点のたわみ角は

$$\theta_B=\frac{wl^3}{6EI}=\frac{1\times500^3}{6\times70000\times69984}\fallingdotseq0.00426\ \text{ラジアン（時計回り）}$$

問題 4.　2·11 図(a)のようなはりの，A 点，B 点のたわみ角 θ_A，θ_B および C 点のたわみ δ_C を求めよ．

〔解〕 モールの定理を用いて，弾性荷重図の Q_A，Q_B，M_C を求めればよい．よって，まず 2·11図(a)の曲げモーメント図，すなわち 2·11 図(b)を求め，これから弾性荷重図，すなわち 2·11 図(c)をえがく．2·11 図(d)において，$\sum M_A=0$ から R_B を求めると

$$\left(\frac{9Pl^2}{128EI}\times\frac{l}{2}\right)+\left(\frac{3Pl^2}{128EI}\times\frac{5}{6}l\right)$$

$$-R_B l=0$$

$$\therefore\quad R_B=\frac{7Pl^2}{128EI}$$

ここで，B点の反力はB点のせん断力となるから

$$Q_B=-R_B$$

よって，B点のたわみ角は

$$\theta_B=-\frac{7Pl^2}{128EI}\ \text{(反時計回り)}$$

同じく $\sum M_B=0$ から R_A を求めると

$$-\left(\frac{9Pl^2}{128EI}\times\frac{l}{2}\right)$$

$$-\left(\frac{3Pl^2}{128EI}\times\frac{l}{6}\right)+R_A l=0$$

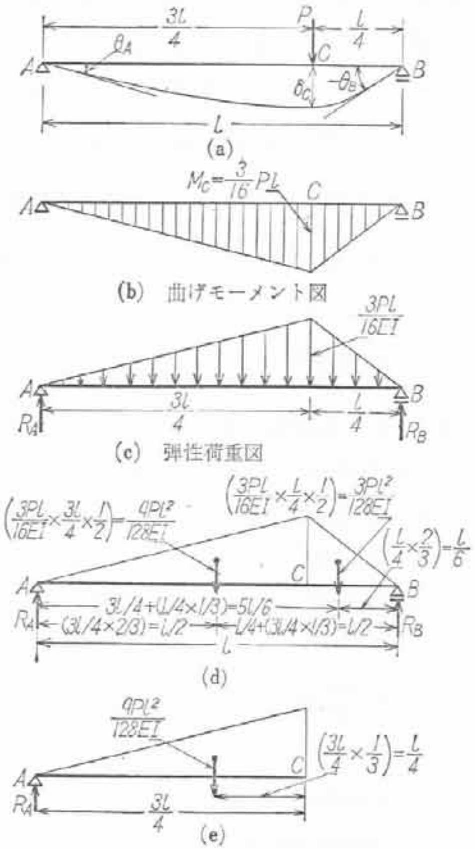
$$\therefore\quad R_A=\frac{5Pl^2}{128EI}$$

ここで，A点の反力はA点のせん断力となるから

$$Q_A=+R_A$$

よって，A点のたわみ角は

$$\theta_A=\frac{5Pl^2}{128EI}\ \text{(時計回り)}$$



2·11 図

2·11 図(e)において，C点の曲げモーメントの値を求めると

$$M_C=\left(R_A\times\frac{3}{4}l\right)-\left(\frac{9Pl^2}{128EI}\times\frac{l}{4}\right)=\left(\frac{5Pl^2}{128EI}\times\frac{3}{4}l\right)-\left(\frac{9Pl^2}{128EI}\times\frac{l}{4}\right)=\frac{3Pl^3}{256EI}$$

よって，C点のたわみは

$$\delta_C=+M_C,\qquad \therefore\quad \delta_C=\frac{3Pl^3}{256EI}\ \text{(下向き)}$$

問題 5.　2·12 図(a)のはりの，A，B点のたわみ角θ_A，θ_B，およびC点のたわみδ_Cを求めよ．

〔解〕 モールの定理を用い，弾性荷重図におけるA，B点のせん断力，C点の曲げモーメントの値を計算する．よって，まず 2·12 図(a)の曲げモーメント図は，2·12 図(b)のようになる．弾性荷重図すなわち 2·12 図(c)において，左右対称なので，台形荷重図の面積を 1/2 にすれば，R_A，R_B が求まる。

$$R_A=R_B$$

$$=\left\{\left(\frac{l}{2}+l\right)\times\frac{Pl}{4EI}\times\frac{1}{2}\right\}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3Pl^2}{32EI}$$

ここで，A，B点の反力は，それぞれA，B点のせん断力を表わすから

$$Q_A=R_A\ \text{ゆえに}\ \theta_A=\frac{3Pl^2}{32EI}$$

(時計回り)

$$Q_B=-R_B\ \text{ゆえに}\ \theta_B=-\frac{3Pl^2}{32EI}$$

(反時計回り)

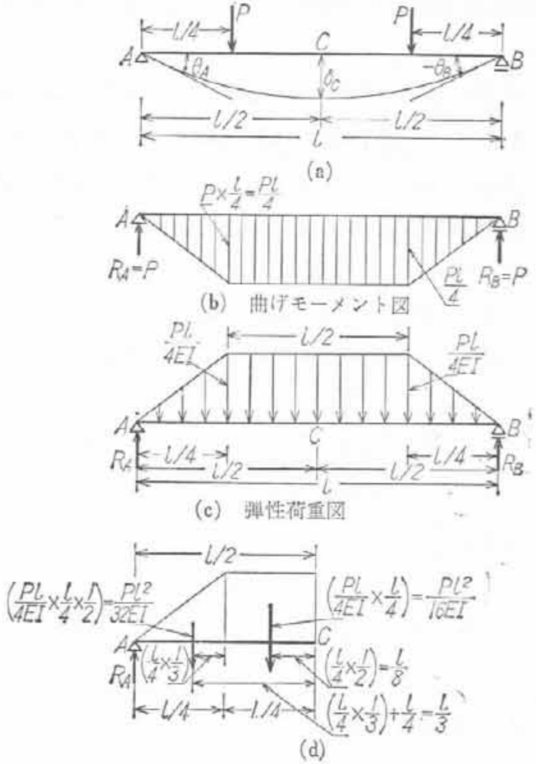
2·12 図(d)において，C点の曲げモーメントの値を計算すると，δ_Cが求められる．

$$M_C=\left(R_A\times\frac{l}{2}\right)-\left(\frac{Pl^2}{32EI}\times\frac{l}{3}\right)$$

$$-\left(\frac{Pl^2}{16EI}\times\frac{l}{8}\right)$$

$$=\frac{3Pl^3}{64EI}-\frac{Pl^3}{96EI}-\frac{Pl^3}{128EI}$$

$$=\frac{18Pl^3-4Pl^3-3Pl^3}{384EI}=\frac{11Pl^3}{384EI}$$



2·12 図

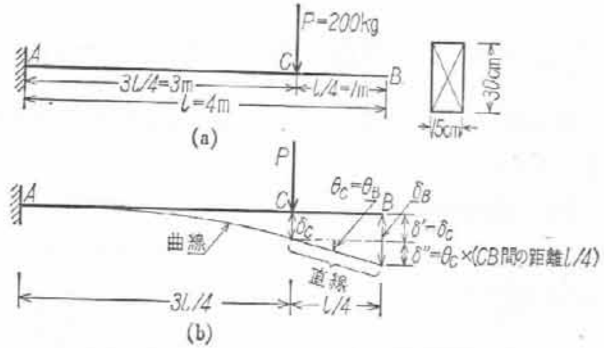
よって

$$\delta_C=+M_C$$

ゆえに

$$\delta_C=\frac{11Pl^3}{384EI}\ \text{(下向き)}$$

問題 6.　2·13 図(a)の片持ちばりの，B点のたわみおよびたわみ角の式をみちびき，これに



2·13 図

数値を適用して計算せよ．ただし，はり材のヤング係数を $E=90000\ \mathrm{kg/cm^2}$ とする．

〔解〕 片持ちばりの先端に，集中荷重が作用したときの式を用いて δ_C, θ_C を求める．すなわち，$\delta_C=\dfrac{Pl^3}{3EI}$，$\theta_C=\dfrac{Pl^2}{2EI}$ を利用し，この式中において $l=\left(AC\ 間の距離=\dfrac{3}{4}l\right)$ として計算をする．また，2·13 図(b)のように，C—B 間は荷重が作用していないので，その間の材軸の変形は直線状になり，C 点のたわみ角と B 点のたわみ角は同じ値をとる．B 点のたわみ δ_B を求めるには，2·13 図(b)において，$\delta_B=\delta'+\delta''$ から計算する．

以上を考慮して，2·13 図(b)において，まず C 点のたわみを計算する．$\delta_C=\dfrac{Pl^3}{3EI}$ の式中，ここでは l の代わりに $3/4l$ が相当するので

$$\delta_C=\frac{P\left(\frac{3}{4}l\right)^3}{3EI}=\frac{9Pl^3}{64EI}=\delta'\ （下向き）$$

ここで，2·13 図(b)においては $\delta'=\delta_C$ となる．また，同じく，$\theta_C=\dfrac{Pl^2}{2EI}$ の式中，l の代わりに $\dfrac{3}{4}l$ を用いれば

$$\therefore\ \theta_C=\frac{P\left(\frac{3}{4}l\right)^2}{2EI}=\frac{9Pl^2}{32EI}=\theta_B\ （時計回り）$$

ここで，CB 間の材軸の変形が直線状になるから，$\theta_C=\theta_B$ となる．ところで，2·13 図(b)から δ'' の値を求めると

$$\delta''=\theta_C\times(CB\ 間の距離=l/4)$$

となるから

$$\delta''=\theta_C\times\frac{l}{4}=\frac{9Pl^2}{32EI}\times\frac{l}{4}=\frac{9Pl^3}{128EI}\ （下向き）$$

よって

$$\therefore\ \delta_B=\delta'+\delta''=\frac{9Pl^3}{64EI}+\frac{9Pl^3}{128EI}=\frac{27Pl^3}{128EI}\ （下向き）$$

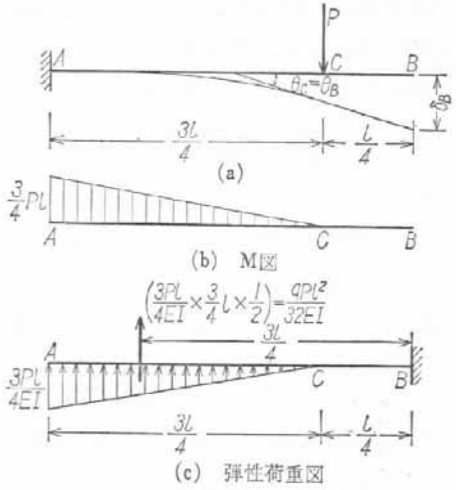
類　題　2·14 図(a)のはりの，B 点のたわみ δ_B およびたわみ角 θ_B を，別解によって求めよ．

〔解〕 弾性荷重図を用いて，B 点のせん断力および曲げモーメントの値を求め，これから θ_B，δ_B を見出す．まず，2·14 図(b)の曲げモーメント図から，2·14 図(c)の弾性荷重図がえられる．これから

$$\theta_B=弾性荷重図における\ B\ 点のせん断力\ Q_B=\frac{3Pl}{4EI}\times\frac{3}{4}l\times\frac{1}{2}=\frac{9Pl^2}{32EI}\ （時計回り）$$

また

$$\theta_C=\frac{9Pl^2}{32EI}\ （時計回り）$$



2·14 図

ここで，$\theta_B=\theta_C$ ということは，2·14 図(c)の C—B 間のせん断力が同じ大きさで推移する，すなわち，この間のせん断力が一定であるということである．

$$\delta_B=弾性荷重図における\ B\ 点の曲げモーメント\ M_B$$

$$=\frac{9Pl^2}{32EI}\times\frac{3}{4}l=\frac{27Pl^3}{128EI}$$

（下向き）

これから，結果は前解と同一になる．また，上記式中に 2·13 図(a)の数値を適用して計算すると，このはりの断面 2 次モーメントは

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{15\times30^3}{12}=33750\ \mathrm{cm^4}$$

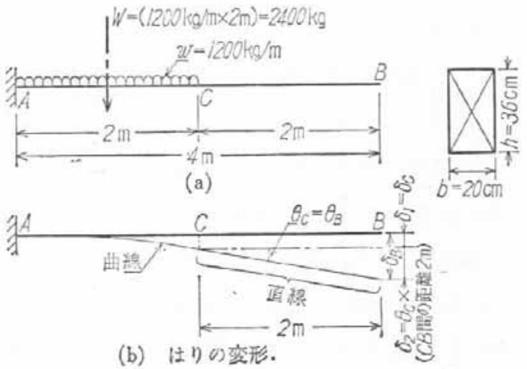
よって

$$\delta_B=\frac{27Pl^3}{128EI}=\frac{27\times200\times400^3}{128\times90000\times33750}=0.89\ \mathrm{cm}\ （下向き）$$

$$\theta_B=\frac{9Pl^2}{32EI}=\frac{9\times200\times400^2}{32\times90000\times33750}=0.00296\ ラジアン\ （時計回り）$$

問題 7.　2·15 図(a)のはりの，B 点のたわみ δ_B とたわみ角 θ_B を求めよ．ここで，はり材のヤング係数を $E=90000\ \mathrm{kg/cm^2}$ とする．

〔解〕 等分布荷重が AC 間だけに作用しているので，片持ちばりの全区間 AB 間に等分布荷重が作用したときの式 $\theta=\dfrac{Wl^2}{6EI}$ を用い，この式中の l を $l=(AC\ 間の距離)=2\ \mathrm{m}$ として計算し，θ_C を求める．また，C 点のたわみも，$\delta=\dfrac{Wl^3}{8EI}$ 式から同じく $l=2\ \mathrm{m}$ として計算する．



2·15 図

CB 間は，荷重が作用していないので，その間のはりの変形は 2·15 図（b）のように直線状になり，θ_C と θ_B は同じ値となる．また，δ_B は 2·15 図(b)から $\delta_B=\delta_1+\delta_2$ で求められる．

このはりの断面 2 次モーメントは

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{20\times 36^3}{12}=77760\ \mathrm{cm}^4$$

また

$$W=1200\ \mathrm{kg/m}\times 2\ \mathrm{m}=2400\ \mathrm{kg}$$

$$l=2\ \mathrm{m}=200\ \mathrm{cm}$$

よって，このはりの C 点のたわみ角を求めると

$$\theta_C=\theta_B=\frac{Wl^2}{6EI}=\frac{2400\times 200^2}{6\times 90000\times 77760}\fallingdotseq 0.00229\ \text{ラジアン（時計回り）}$$

2·15 図(b)において，このはりの C 点のたわみを求めると

$$\delta_1=\delta_C=\frac{Wl^3}{8EI}$$

また，θ_C によって生じる B 点のたわみは

$$\delta_2=\theta_C\times(CB\ \text{間の距離}=200\ \mathrm{cm})$$

よって

$$\delta_B=\delta_1+\delta_2=\frac{Wl^3}{8EI}+(\theta_C\times 200)$$

ここで，δ_1 において $l=(AC\ \text{間の距離})=200\ \mathrm{cm}$ として計算すると

$$\delta_1=\frac{W(200)^3}{8EI}=\frac{2400\times 200^3}{8\times 90000\times 77760}\fallingdotseq 0.343\ \mathrm{cm}$$

また，δ_2 において

$$\delta_2=\theta_C\times 200=0.00229\times 200=0.458\ \mathrm{cm}$$

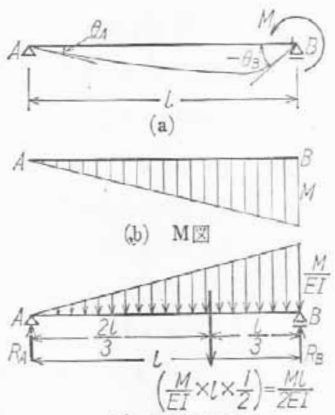
よって

$$\delta_B=\delta_1+\delta_2=0.343\ \mathrm{cm}+0.458\ \mathrm{cm}=0.801\ \mathrm{cm}$$

（下向き）

問題 8. 2·16 図(a)のはりの，A 点および B 点のたわみ角 θ_A，θ_B を求めよ．

〔解〕このはりの曲げモーメント図すなわち 2·16 図(b)から弾性荷重図を求め，その反力を計算すればよい．よって，2·16 図(c)の弾性荷重図における A, B 支点の反力を求めると，$\sum M_B=0$ から



(a)

(b) M図

(c) 弾性荷重図

2·16 図

$$(R_Al)-\left(\frac{Ml}{2EI}\times\frac{l}{3}\right)=0,\qquad \therefore\ R_A=\frac{Ml}{6EI}$$

R_A が A 点のせん断力の大きさを示し，その符号は (+) ↑↓ になるから，A 点のたわみ角 θ_A は

$$Q_A=R_A,\qquad \therefore\ \theta_A=\frac{Ml}{6EI}\ \text{（時計回り）}$$

となる．$\sum M_A=0$ から

$$-(R_Bl)+\left(\frac{Ml}{2EI}\times\frac{2}{3}l\right)=0,\qquad \therefore\ R_B=\frac{Ml}{3EI}$$

R_B が B 点のせん断力の大きさを示し，その符号は (−) ↓↑ になるから，B 点のたわみ角 θ_B は

$$Q_B=-R_B,\qquad \therefore\ \theta_B=-\frac{Ml}{3EI}\ \text{（反時計回り）}$$

問題 9. 2·17 図(a)のはりの，A，B 支点のたわみ角 θ_A，θ_B および C 点のたわみ δ_C を求めよ．

〔解〕このはりの弾性荷重図を求め，それから A, B 点のせん断力および C 点の曲げモーメントの値を求めればよい．すなわち，2·17 図(a)の曲げモーメント図が 2·17 図(b)となり，これから 2·17 図（c）の弾性荷重図がえられる．この弾性荷重図において，R_A, R_B, M_C を求めればよい．

2·17 図(c)は，すべて左右対称なので，全荷重を R_A，R_B が 1/2 ずつ分担しているから

$$R_A=R_B=\left(\frac{M}{EI}\times l\right)\times\frac{1}{2}$$

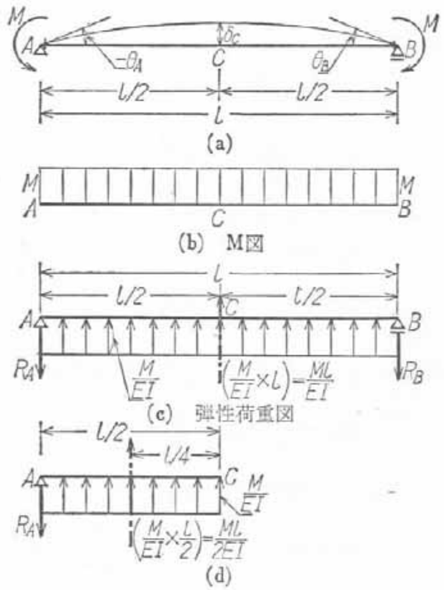
$$=\frac{Ml}{2EI}$$

ここで，R_A が A 点のせん断力の大きさを示し，その符号は (−) ↓↑ なので

$$Q_A=-R_A$$

$$\therefore\ \theta_A=-\frac{Ml}{2EI}\ \text{（反時計回り）}$$

同じく B 点のせん断力の符号は (+) ↑↓ なので



(a)

(b) M図

(c) 弾性荷重図

(d)

2·17 図

$$Q_B = R_B, \qquad \therefore\ \theta_B = \frac{Ml}{2EI}\ \text{(時計回り)}$$

2·17 図 (d) から，C 点の曲げモーメントを求めると δ_C が判明する．

$$M_C = -\left(R_A \times \frac{l}{2}\right) + \left(\frac{Ml}{2EI} \times \frac{l}{4}\right) = -\left(\frac{Ml}{2EI} \times \frac{l}{2}\right) + \left(\frac{Ml}{2EI} \times \frac{l}{4}\right)$$

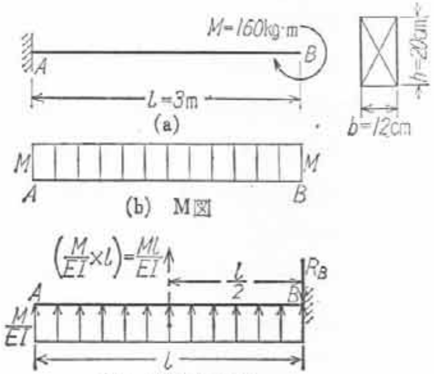
$$= \frac{Ml}{2EI}\left(\frac{l}{4} - \frac{l}{2}\right) = -\frac{Ml^2}{8EI}$$

$$\therefore\ \delta_C = -\frac{Ml^2}{8EI}\ \text{(上向き)}$$

すなわち，曲げモーメントの符号がマイナスなので，δ_C は C 点の上方へ発生する．

問題 10. 2·18 図 (a) のような片持ちばりの，B 点のたわみおよびたわみ角を求める式をみちびき，これに与えられた数値を適用して計算せよ．ただし，はり材のヤング係数を $E = 90000\ \mathrm{kg/cm^2}$ とする．

〔解〕 まず，このはりの曲げモーメント図すなわち 2·18 図 (b) を求め，次いでその弾性荷重図すなわち 2·18 図 (c) から，B 点のせん断力と曲げモーメントの値を計算すれば，θ_B，δ_B が判明する．2·18 図 (c) において，$\sum Y = 0$ から



(a)

(b) M図

(c) 弾性荷重図

2·18 図

$$\left(\frac{M}{EI} \times l\right) - R_B = 0$$

$$\therefore\ R_B = \left(\frac{M}{EI} \times l\right) = \frac{Ml}{EI}$$

これから B 点のたわみ角は

$$Q_B = R_B$$

$$\therefore\ \theta_B = \frac{Ml}{EI}\ \text{(時計回り)}$$

となる．2·18 図 (c) において，M_B を求めると

$$M_B = \frac{Ml}{EI} \times \frac{l}{2} = \frac{Ml^2}{2EI}$$

これから B 点のたわみは

$$\delta_B = M_B, \qquad \therefore\ \delta_B = \frac{Ml^2}{2EI}\ \text{(下向き)}$$

これらに数値を適用して計算すると，このはりの断面 2 次モーメントは

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \times 20^3}{12} = 8000\ \mathrm{cm^4}$$

$$M = 160\ \mathrm{kg \cdot m} = 16000\ \mathrm{kg \cdot cm}$$

$$l = 3\ \mathrm{m} = 300\ \mathrm{cm}$$

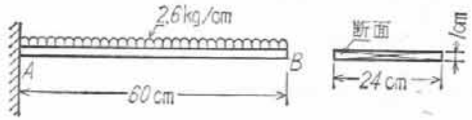
よって

$$\theta_B = \frac{Ml}{EI} = \frac{16000 \times 300}{90000 \times 8000} \fallingdotseq 0.00667\ \text{ラジアン}$$

$$\delta_B = \frac{Ml^2}{2EI} = \frac{16000 \times 300^2}{2 \times 90000 \times 8000} = 1\ \mathrm{cm}$$

問題 11. 2·19 図のような状態において，B 点に 1 cm のたわみが発生した．このときの AB 材のヤング係数 E の値を求めよ．

〔解〕 片持ちばり全スパンに等分布荷重が作用しているときの，最大たわみを求める式 $\delta = \frac{wl^4}{8EI}$ から，E を未知数として求めればよい．この断面の断面 2 次モーメントは



2·19 図

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{24 \times 1^3}{12} = 2\ \mathrm{cm^4}$$

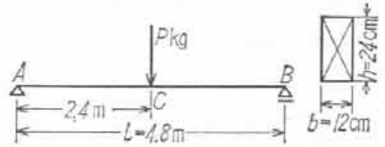
ここで，B 点におけるたわみの式 $\delta_B = \frac{wl^4}{8EI}$ を変形して，これに $\delta_B = 1\ \mathrm{cm}$ を代入すれば

$$E = \frac{wl^4}{8I\delta_B} = \frac{2.6 \times 60^4}{8 \times 2 \times 1} = 2106000\ \mathrm{kg/cm^2}$$

よって，A，B 材のヤング係数は $E = 2106000\ \mathrm{kg/cm^2}$ となる．

問題 12. 2·20 図のようなはりの，中央部のたわみを $\delta_C = 1\ \mathrm{cm}$ にするためには，C 点にどれほどの単一集中荷重を作用させたらよいか．ただし，はり材のヤング係数を $E = 90000\ \mathrm{kg/cm^2}$ とする．

〔解〕 単純ばりの中央部に単一集中荷重が作用したときの，最大たわみの公式 $\delta = \frac{Pl^3}{48EI}$ から，P を未知数として求めればよい．このはりの断面 2 次モーメントは



2·20 図

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \times 24^3}{12} = 13824\ \mathrm{cm^4}$$

また

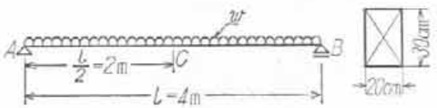
$$l = 4.8\ \mathrm{m} = 480\ \mathrm{cm}, \qquad \delta_C = 1\ \mathrm{cm}$$

このはりのC点のたわみの式 $\delta_C=\frac{Pl^3}{48EI}$ を変形して，未知数 P を求めると

$$P=\frac{48EI\delta_C}{l^3}=\frac{48\times 90000\times 13824\times 1}{480^3}=540\ \mathrm{kg}$$

∴ $P=540$ kg

問題 13. 2·21図のような，スパン $l=4$ m，はり成 $h=30$ cm，はり幅 $b=20$ cm の木材の単純ばりがある．このはりの最大たわみを，$\delta_{max}=\frac{l}{480}$ に制限するための，等分布荷重 w はどれほどであるか．ただし，はり材のヤング係数を $E=90000\ \mathrm{kg/cm^2}$ とする．



2·21 図

〔解〕 単純ばりの全スパンに等分布荷重が作用したときの，はり中央部の最大たわみを求める式 $\delta=\frac{5wl^4}{384EI}$ から，w を未知数として求めればよい．このはりの断面2次モーメントは

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{20\times 30^3}{12}=45000\ \mathrm{cm^4}$$

このはりの制限最大たわみは

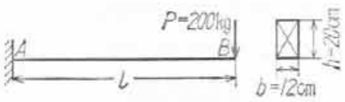
$$\delta_{max}=\frac{l}{480}=\frac{400}{480}\fallingdotseq 0.83\ \mathrm{cm}=\delta_C$$

このはりのC点のたわみを求める式 $\delta_C=\frac{5wl^4}{384EI}$ を変形して，w を求めると

$$w=\frac{384EI\delta_C}{5l^4}=\frac{384\times 90000\times 45000\times 0.83}{5\times 400^4}\fallingdotseq 10.08\ \mathrm{kg/cm}$$

∴ $w=1008$ kg/m

問題 14. 2·22図のはりの，B点のたわみ角 θ_B を0.00625ラジアンにするためには，はりの長さ l をどれほどにすればよいか．ただし，はり材のヤング係数を $E=80000\ \mathrm{kg/cm^2}$ とする．



2·22 図

〔解〕 このはりの，B点のたわみ角 θ_B を求める式 $\theta_B=\frac{Pl^2}{2EI}$ から，l を未知数として求めればよい．このはりの断面2次モーメントは

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{12\times 20^3}{12}=8000\ \mathrm{cm^4}$$

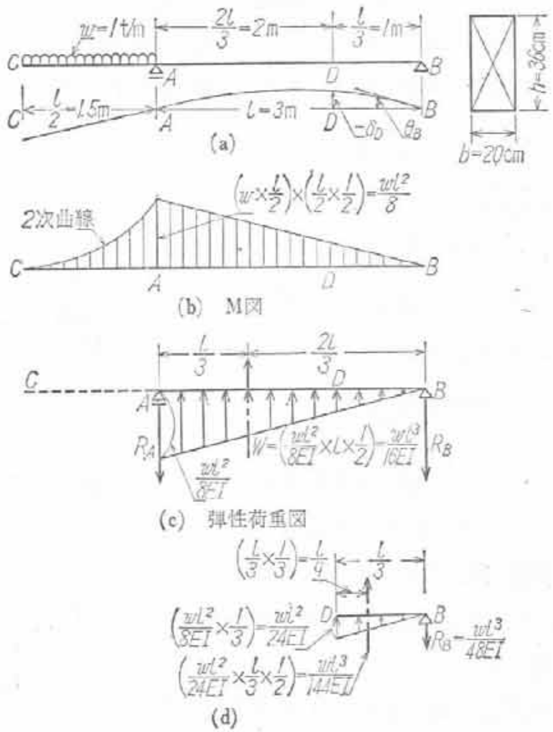
$\theta_B=\frac{Pl^2}{2EI}$ を変形し，$\theta_B=0.00625$ ラジアンとおいて計算すると

$$l^2=\frac{2EI\theta_B}{P}=\frac{2\times 80000\times 8000\times 0.00625}{200}=40000\ \mathrm{cm^2}$$

∴ $l=\sqrt{40000}=200\ \mathrm{cm}=2\ \mathrm{m}$

問題 15. 2·23図(a)のはりの，B点のたわみ角 θ_B とD点のたわみ δ_D を求めよ．ただし，はり材のヤング係数を $E=80000\ \mathrm{kg/cm^2}$ とする．

〔解〕 2·23図(a)の曲げモーメント図は，2·23図(b)のようになる．2·23図(b)から，AB間の曲げモーメント図を弾性荷重として，2·23図(c)の弾性荷重図が求められる．



2·23 図

2·23図(c)において R_B を求めれば，これがB点のたわみ角 θ_B となり，2·23図(d)において M_D を求めれば，これがD点のたわみ δ_D となる．2·23図(c)において，$\sum M_A=0$ から R_B を求めると

$$-\left(\frac{wl^3}{16EI}\times\frac{l}{3}\right)+R_Bl=0$$

∴ $R_B=\frac{wl^3}{48EI}$

ここで

$Q_B=R_B$

よって

$\theta_B=Q_B$, ∴ $\theta_B=\frac{wl^3}{48EI}$ (時計回り)

このはりの断面2次モーメントは

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{20\times 36^3}{12}=77760\ \mathrm{cm^4}$$

$w=1\ \mathrm{t/m}=1000\ \mathrm{kg}/100\ \mathrm{cm}=10\ \mathrm{kg/cm}$

これから数値を適用すれば

$$\theta_B=\frac{wl^3}{48EI}=\frac{10\times300^3}{48\times80000\times77760}\fallingdotseq0.000904\ \text{ラジアン（時計回り）}$$

2·23図(d)から M_D を求めると

$$M_D=\left(R_B\times\frac{l}{3}\right)-\left(\frac{wl^3}{144EI}\times\frac{l}{9}\right)=\left(\frac{wl^3}{48EI}\times\frac{l}{3}\right)-\left(\frac{wl^3}{144EI}\times\frac{l}{9}\right)$$

$$=\frac{9wl^4-wl^4}{1296EI}=\frac{8wl^4}{1296EI}=\frac{wl^4}{162EI}$$

ここで，右端から曲げモーメントを計算したので M_D はプラスになったが，曲げモーメントの符号としてはマイナスとなる．よって符号を変えて

$$\therefore\ M_D=-\frac{wl^4}{162EI}$$

となる．これから

$$\delta_D=-M_D$$

$$\therefore\ \delta_D=-\frac{wl^4}{162EI}\ \text{（上向き）}$$

これに数値を適用すれば

$$\delta_D=-\frac{wl^4}{162EI}$$

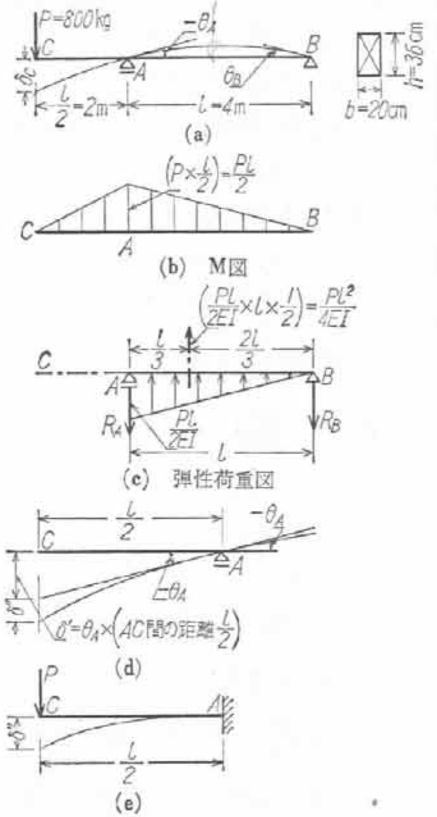
$$=-\frac{10\times300^4}{162\times80000\times77760}$$

$$\fallingdotseq-0.0804\ \text{cm（上向き）}$$

問題 16. 2·24図(a)のはりの A, B 点のたわみ角 θ_A, θ_B と C 点のたわみ δ_C を求めよ．

ただし，はり材のヤング係数を $E=80000\ \text{kg/cm}^2$ とする．

〔解〕 2·24図(a)の曲げモーメント図を求めると，2·24図(b)のようになる．つぎに，AB 間の曲げモーメント図を弾性荷重として，2·24図(c)の弾性荷重図を求める．2·24図(c)において R_A, R_B を求めると，これがたわみ角 θ_A, θ_B となる．



2·24 図

ここで δ_C を求めるには，2·24図(d)のように，$-\theta_A$ によってはね出しばり AC 部分が下方へ変形され，$-\theta_A$ だけによって δ' のたわみが生じる．さらに，2·24図(e)のように，A 点を固定端と考えたときの P によるたわみ δ'' が加わり，δ_C はこの2つのたわみを加えたもの，すなわち

$$\delta_C=\delta'+\delta''$$

という値となる．

以上を考慮して求めると，2·24図(c)の弾性荷重図において，$\sum M_A=0$ から

$$-\left(\frac{Pl^2}{4EI}\times\frac{l}{3}\right)+R_Bl=0$$

$$\therefore\ R_B=\frac{Pl^2}{12EI}$$

$\sum M_B=0$ から

$$\left(\frac{Pl^2}{4EI}\times\frac{2}{3}l\right)-R_Al=0$$

$$\therefore\ R_A=\frac{Pl^2}{6EI}$$

よって

$$Q_A=-R_A\longrightarrow\therefore\ \theta_A=-\frac{Pl^2}{6EI}\ \text{（反時計回り）}$$

$$Q_B=R_B\longrightarrow\therefore\ \theta_B=\frac{Pl^2}{12EI}\ \text{（時計回り）}$$

2·24図(d)において，θ_A によるたわみ δ' を求めると

$$\delta'=\theta_A\times\left(AC\ \text{間の距離}\ \frac{l}{2}\right)=\frac{Pl^2}{6EI}\times\frac{l}{2}=\frac{Pl^3}{12EI}$$

2·24図(e)において，片持ちばりの先端に集中荷重が作用したときの式を用い，式中の l を AC 間の距離 $\frac{l}{2}$ におきかえて δ'' を求めると

$$\delta''=\frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI}=\frac{Pl^3}{24EI}$$

よって，C 点のたわみ δ_C は

$$\delta_C=\delta'+\delta''=\frac{Pl^3}{12EI}+\frac{Pl^3}{24EI}=\frac{Pl^3}{8EI}\ \text{（下向き）}$$

ここで，数値を適用して計算すると，このはりの断面2次モーメントは

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{20\times36^3}{12}=77760\ \text{cm}^4$$

$$\delta_C=\frac{Pl^3}{8EI}=\frac{800\times400^3}{8\times80000\times77760}\fallingdotseq1.029\ \text{cm（下向き）}$$

$$\theta_A = -\frac{Pl^2}{6EI} = -\frac{800\times400^2}{6\times80000\times77760} \fallingdotseq -0.00343$$ ラジアン（反時計回り）

$$\theta_B = \frac{Pl^2}{12EI} = \frac{800\times400^2}{12\times80000\times77760} \fallingdotseq 0.00172$$ ラジアン（時計回り）

または

$$\theta_B = \left(\theta_A\times\frac{1}{2}\right) \fallingdotseq 0.00172$$ ラジアン