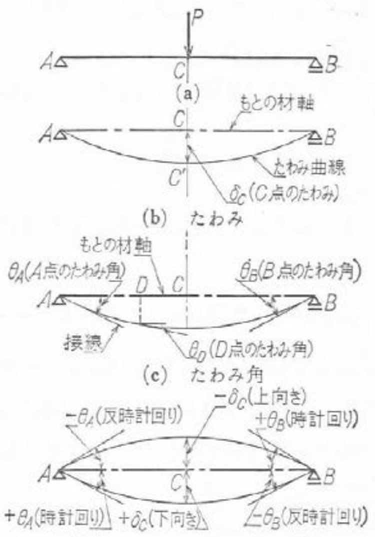
第 9，10 回　静定梁の変形、モールの定理

2・1　たわみ曲線

2·1図（a）のように，はりに P という荷重が作用すると，そのためにはりが曲がってくる．そして，2·1図（b）のように，はりの材軸は下方へ変形してくる．このように，曲がってきた材軸が現わす曲線のことを**たわみ曲線**または**弾性曲線**と呼ぶ．

2・2　た　わ　み

2·1図（b）において，P の作用位置 C 点についてみると，もとの材軸の C 点は，はりが曲がった場合にその真下の C' 点に下がってくる．この C 点と C' 点との間の大きさを**たわみ**と呼び，ふつう δ（デルタと読む．）という記号で表わす．その単位は cm である．このたわみは，C 点において最大値を示し，A 支点，B 支点に近づくにつれて小さくなっている．



（d）たわみとたわみ角の符号．

2·1 図

2·1図（d）のように，たわみの符号はもとの材軸から下向きに発生した場合をプラス，上向きに発生した場合をマイナスとする．よって，2·1図（b）の場合はプラスである．

2・3　たわみ角

2・1図(c)において，はりの任意の点のたわみ曲線に接線をひいて，その接線ともとの材軸とのなす角度を求めてみる．この求まった角度のことをその点の**たわみ角**といい，ふつう θ（シータと読む.）という記号で表わす．たとえば，A点のたわみ曲線に接線をひいて，もとの材軸とのなす角度を求めると，A点のたわみ角 θ_A が求められる．同様にして θ_D，θ_B も求められる．

2・1図(d)のように，たわみ角の符号はもとの材軸から時計回りに測れるような場合をプラスとし，反時計回りに測れるような場合をマイナスとする．よって，2・1図(c)では $+\theta_A$，$+\theta_D$，$-\theta_B$ となる．そして，たわみ角の大きさは，はりの両端に近づくにつれて大きくなり，はり中央に近づくにつれて小さくなって，ついにC点ではゼロになる．

たわみ角の単位にはラジアンを用いる．1ラジアン≒57°17′45″ である．

2・4　モールの定理

上述のたわみやたわみ角の値を計算するためには，つぎの**モールの定理**が用いられる．

すなわち，“あるはりにその曲げモーメント図を $\dfrac{1}{EI}$ 倍したものを荷重として作用させてみる．この場合の曲げモーメントの値を求めると，これがそのはりについてのたわみを示すものになる．同じくこの場合のせん断力の値を求めると，これがそのはりについてのたわみ角を示すものになる．”というのがモールの定理の内容である．

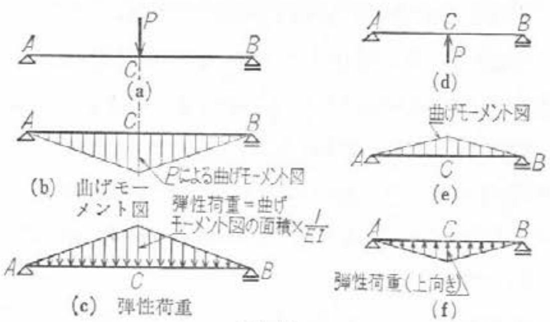
その適用の方法は，以下に示すように，単純ばりの場合と片持ちばりの場合とでは異なるのである．

1.　単純ばりとモールの定理

モールの定理を単純ばりに適用し，そのはりのたわみおよびたわみ角の値を求める方法を，順を追って示してみる．

① 2・2図(a)のような単純ばりのC点のたわみ，およびA点のたわみ角を求めるには，まず，このはりの曲げモーメント図を，2・2図(b)のように求めてみる．

② つぎに，2・2図(b)の曲げモーメント図の面積を，$\dfrac{1}{EI}$倍したものを，荷重としてはりに2・2図(c)のように作用させてみる．ここで，Eははりのヤング係数，Iははりの断面2次モーメントである．このような荷重のことを**弾性荷重**という．



2・2 図

また，2・2図(b)のように，曲げモーメント図がはりの下側にえがかれるときには，弾性荷重を下向きに，2・2図(c)のように作用させる．

2・2図(d)，(e)，(f)のように，曲げモーメント図がはりの上側にえがかれるときは，逆に弾性荷重を上向きに作用させればよい．

③ 2・2図(c)において，C点の曲げモーメントを求めれば，これがC点のたわみの値となる．一般に，このはりのどの点のたわみの値も，このように弾性荷重による曲げモーメントの値を求めることによってえられる．

ここで求められた曲げモーメントの符号がプラスのときは，たわみは下向きに発生し，逆にマイナスのときは，たわみは上向きに発生する．たとえば，2・2図(c)のC点では，曲げモーメントの符号はプラスで，たわみは下向きに発生し，2・2図(f)のC点では，曲げモーメントの符号がマイナスとなり，たわみは上向きに発生する．

④ 2・2図(c)において，A点のせん断力を求めれば，これがA点のたわみ角の値となる．一般に，このはりのどの点のたわみ角の値も，このように弾性荷重によるせん断力の値を求めることによってえられる．

ここで求められたせん断力の符号がプラスのときは，プラスのたわみ角（時計回り）となり，逆にマイナスのときはマイナスのたわみ角（反時計回り）となる．

以上から，たわみおよびたわみ角を求める式をまとめてみると

単純ばりのたわみ＝弾性荷重によるその点の曲げモーメントの値．

単純ばりのたわみ角＝弾性荷重によるその点のせん断力の値．

以下，公式および計算を例示してみる．

例題 1. 2·3図(a)のように，単純ばりの中央に集中荷重が作用した場合を考えてみよ．

〔解〕 このとき，はりは2·3図(b)のように変形し，C点にはこのはりの最大たわみ δ_C が発生する．また，A，B両支点には，このはり最大のたわみ角 θ_A および $-\theta_B$ が発生する．

ここで，このはりの δ_C，θ_A，$-\theta_B$ を求めてみる．まず，2·3図(a)の単純ばりの曲げモーメント図を求めてみると，2·3図(c)のようになる．2·3図(c)から弾性荷重図を求めてみると，2·3図(d)のようになる．

2·3図(d)において，反力を求めると，左右対称なので R_A，R_B が全荷重（三角形をなす等変荷重の面積.）を半分ずつ分担するから

$$R_A=R_B=\left(\frac{Pl}{4EI}\times l\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{Pl^2}{16EI}$$

となる．ここで R_A と R_B は，それぞれA点およびB点のせん断力の値を示すものであり，その符号は

$$Q_A=R_A\uparrow\downarrow$$

$$Q_B=-R_B\downarrow\uparrow$$

となる．よって

$$A\text{点のたわみ角}\longrightarrow\theta_A=Q_A=\frac{Pl^2}{16EI}\ (\text{時計回り})$$

$$B\text{点のたわみ角}\longrightarrow\theta_B=-Q_B=-\frac{Pl^2}{16EI}\ (\text{反時計回り})$$

2·3図(e)において，C点の曲げモーメントを計算すると

$$M_C=\left(R_A\times\frac{l}{2}\right)-\left(\frac{Pl^2}{16EI}\times\frac{l}{6}\right)=\left(\frac{Pl^2}{16EI}\times\frac{l}{2}\right)-\left(\frac{Pl^2}{16EI}\times\frac{l}{6}\right)$$

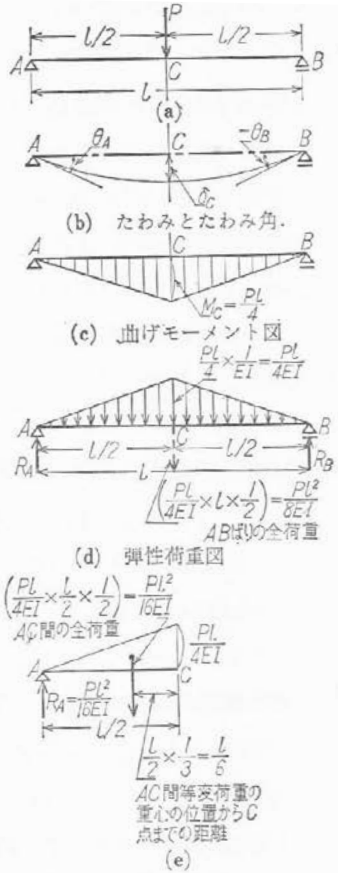
$$=\frac{Pl^2}{16EI}\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{6}\right)=\frac{Pl^2}{16EI}\times\frac{l}{3}=\frac{Pl^3}{48EI}$$

よって，C点のたわみは

$$\delta_C=+M_C(\circlearrowright)$$

ゆえに，C点のたわみは下向きに発生し，その値はつぎのようになる．

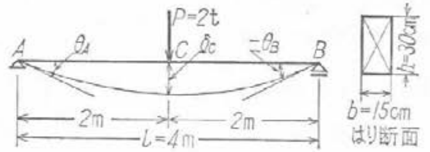
$$\delta_C=\frac{Pl^3}{48EI}\ (\text{下向き})$$



2·3 図

例題 2. 例題1において求めたたわみおよびたわみ角の式を用いて，例題2を解いてみよ．

すなわち，2·4図のような単純ばりの中央に集中荷重が作用したときの，はり中央C点のたわみ δ_C と，A，B支点に発生するたわみ角 θ_A および θ_B を求めてみよ．ただし，はり材のヤング係数を $E=90000\ \mathrm{kg/cm^2}$ とする．



2·4 図

〔解〕 まず，このはりの断面の断面2次モーメントを求めると

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{15\times30^3}{12}=33750\ \mathrm{cm^4}$$

となる．例題1において求めた式に，数値を適用して計算するにあたって，すべての数値の単位を kg と cm に統一しておく．すなわち

$$P=2\ \mathrm{t}=2000\ \mathrm{kg},\quad l=4\ \mathrm{m}=400\ \mathrm{cm}$$

よって

$$\delta_C=\frac{Pl^3}{48EI}=\frac{2000\times400^3}{48\times90000\times33750}\fallingdotseq0.878\ \mathrm{cm}\ (\text{下向き})$$

$$\theta_A=\frac{Pl^2}{16EI}=\frac{2000\times400^2}{16\times90000\times33750}\fallingdotseq0.00659\ \text{ラジアン}\ (\text{時計回り})$$

$$\theta_B=-\frac{Pl^2}{16EI}\fallingdotseq-0.00659\ \text{ラジアン}\ (\text{反時計回り})$$

以上のように，モールの定理によって求めた式に実際の数値を適用して計算すると，たわみやたわみ角の値が求められる．これらの式は一覧表になっていて，種種の状態のときのたわみやたわみ角の式が示されている（2·1表参照）．そして，実際の数値が与えられたとき，これらの式によって計算をして，例題2のように，たわみやたわみ角の大きさを数値で求めることができる．

しかし，その式自体のみちびきかたの原理を知っていないと，一覧表にないはりや，荷重状態の場合に計算ができなくなるから，よくその原理を理解しておく必要がある．

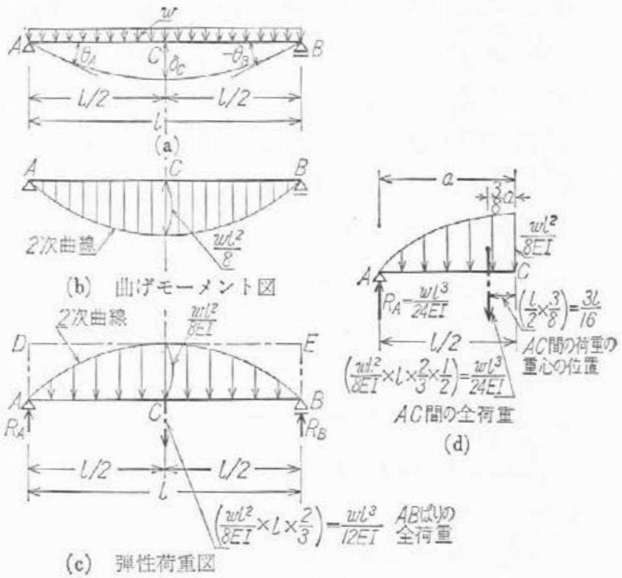
例題 3. 2·5図(a)のように，単純ばりの全スパンに等分布荷重が作用したときに，このはりの中央C点のたわみ δ_C と，A，B支点のたわみ角 θ_A および θ_B を求めてみよ．

〔解〕 2·5図(a)の曲げモーメント図は，2·5図(b)のようになる．2·5図(b)から2·5図

(c)のような弾性荷重図が求められる．2·5図(c)は，左右対称であるから，ABばり上の全荷重を，R_A と R_B が $\frac{1}{2}$ ずつ分担することになる．ここで，ABばり上の放物線形をなす荷重の面積は，長方形 $ABDE$ の $\frac{2}{3}$ の大きさになる．ゆえに全荷重は

$$\frac{wl^2}{8EI}\times l\times\frac{2}{3}=\frac{wl^3}{12EI}$$

となり，両支点の反力は



(a)　(b) 曲げモーメント図　(c) 弾性荷重図　(d)

2·5 図

$$R_A=R_B=\frac{wl^3}{12EI}\times\frac{1}{2}=\frac{wl^3}{24EI}=\frac{Wl^2}{24EI}$$

となる．ただし，$W=w\cdot l$ である．この R_A および R_B は，A点およびB点のせん断力になるから

$$Q_A=R_A\uparrow\downarrow \quad よって \quad \theta_A=\frac{wl^3}{24EI}=\frac{Wl^2}{24EI}\ (時計回り)$$

$$Q_B=-R_B\uparrow\downarrow \quad よって \quad \theta_B=-\frac{wl^3}{24EI}=-\frac{Wl^2}{24EI}\ (反時計回り)$$

2·5図(d)において，はり AC 間をとり出してみる．この AC 区間に作用している全荷重の重心の位置は，AC 間の距離を a とすると，C点から左へ $\frac{3}{8}a$ のところにある．また，AC 間の荷重の全体の大きさは，AB ばりの全荷重の $\frac{1}{2}$ なので

$$\frac{wl^3}{12EI}\times\frac{1}{2}=\frac{wl^3}{24EI}$$

となり，これがC点から左へ $\frac{l}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{16}l$ のところに作用しているとみなして，C点の曲げモーメントを求めると

$$M_C=\left(R_A\times\frac{l}{2}\right)-\left(\frac{wl^3}{24EI}\times\frac{3}{16}l\right)=\left(\frac{wl^3}{24EI}\times\frac{l}{2}\right)-\left(\frac{wl^3}{24EI}\times\frac{3}{16}l\right)$$

$$=\frac{wl^3}{24EI}\left(\frac{l}{2}-\frac{3}{16}l\right)=\frac{wl^3}{24EI}\times\frac{5}{16}l=\frac{5wl^4}{384EI}=\frac{5Wl^3}{384EI}$$

となる．ただし，$W=w\cdot l$ である．よって

$$\delta_C=+M_C(\cdot)$$

となり，つぎのようになる．

$$\delta_C=\frac{5wl^4}{384EI}=\frac{5Wl^3}{384EI}\ (下向き)$$

2. 片持ちばりとモールの定理

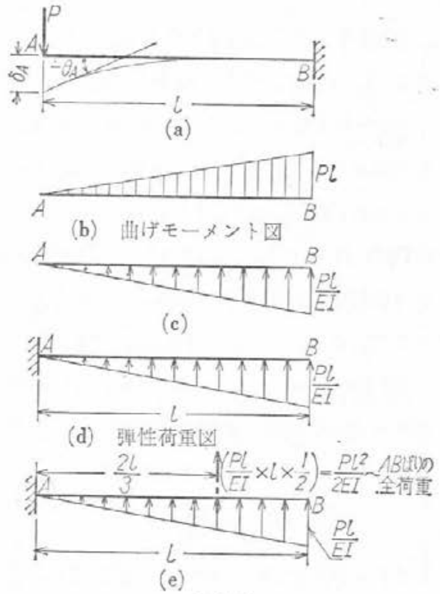
モールの定理を片持ちばりに適用し，そのはりのたわみおよびたわみ角の値を求める方法を，順を追って示してみる．ただし，単純ばりの場合については，すでにひととおり学んでいるので，ここではただちに例題4の公式例からはじめる．

例題 4. 2·6図(a)のような片持ちばりの，A点のたわみ δ_A とたわみ角 θ_A を求めよ．

〔解〕 ① まず，2·6図(a)の場合の曲げモーメント図を，2·6図(b)のように求めてみる．

② つぎに，2·6図(b)の曲げモーメント図から，2·6図(c)のような弾性荷重を求めてみる．曲げモーメント図がはりの上部にえがかれるので，弾性荷重は上向きとなる．

③ さらに2·6図(d)のように，同図(a)において固定端だったB点を自由端とし，同じく自由端だったA点を固定端とする．そして，これに2·6図(c)の弾性荷重を作用させる．



(a)　(b) 曲げモーメント図　(c)　(d) 弾性荷重図　(e)

2·6 図

片持ちばりのときは，このようにしてはじめの2·6図(a)のはりの両端の支持状態をとりかえてから，弾性荷重を作用させるのである．

④ 2·6図(d)において，A点の曲げモーメントの値を求めると，これが2·6図(a)のA点のたわみ δ_A となり，同じく2·6図(d)のA点のせん断力の値を求めると，これが2·6図(a)のA点のたわみ角 θ_A となる．

以上から，2·6図(e)において，A点の曲げモーメントを求めると

$$M_A=-\left(\frac{Pl^2}{2EI}\times\frac{2}{3}l\right)=-\frac{Pl^3}{3EI}$$

ここで，マイナスの符号によって M_A が求められたが，これは右側から計算したからである．すなわち，ここでは A↺ のような状態であって，当然左側においては ↻A となり，総合すると ⊙ のプラスの曲げモーメントとなる．ゆえに

$$\delta_A=+M_A,\qquad \therefore\ \delta_A=\frac{Pl^3}{3EI}\ \text{(下向き)}$$

2·6図(e)において，A点のせん断力を求めると，その値はABばりの全荷重に等しいから

$$Q_A=-\frac{Pl^2}{2EI}\downarrow\uparrow$$

これから

$$\theta_A=-Q_A,\qquad \therefore\ \theta_A=-\frac{Pl^2}{2EI}\ \text{(反時計回り)}$$

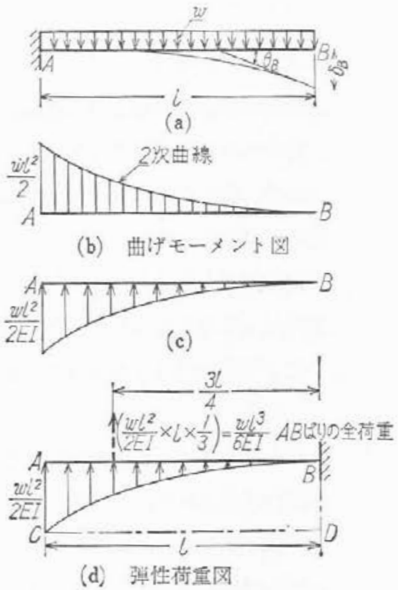
例題 5. 2·7図(a)のように，片持ちばりの全スパンに等分布荷重が作用しているとき，自由端B点のたわみ δ_B とたわみ角 θ_B とを求めてみよ．

〔解〕 2·7図(a)の曲げモーメント図は，2·7図(b)のようになる．2·7図(b)の曲げモーメント図から，2·7図(c)のように弾性荷重を求める．2·7図(d)のように，いままで固定端だったA点を自由端とし，同じく自由端だったB点を固定端として，これに弾性荷重を作用させる．

2·7図(d)において，ABばりに作用している弾性荷重の面積は，長方形ABCDの面積の1/3になる．ゆえに，このはりの全荷重は

$$\frac{wl^2}{2EI}\times l\times\frac{1}{3}=\frac{wl^3}{6EI}$$

また，2·7図(d)において，弾性荷重の重心の位置はB点より左へ $\frac{3}{4}l$ のところにある．ここで2·7図(d)のB点の曲げモーメントを求めてみると

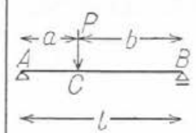
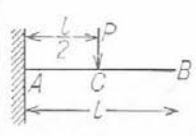
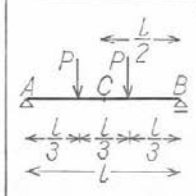
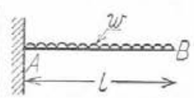
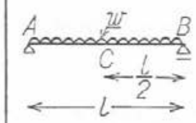
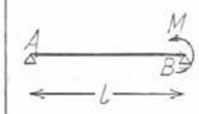
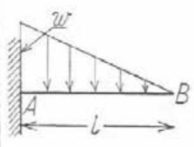
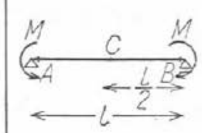
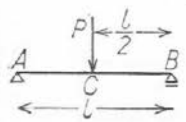
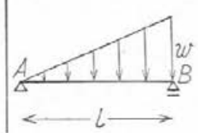


2·7 図

$$M_B=\frac{wl^3}{6EI}\times\frac{3}{4}l=\frac{wl^4}{8EI}=\frac{Wl^3}{8EI}\qquad \therefore\ W=wl$$

よって

2·1 表 はりのたわみとたわみ角．

① 	$\theta_B=\frac{Pl^2}{2EI}$ $\delta_B=\frac{Pl^3}{3EI}$	⑦ 	$\theta_A=\frac{Pab}{6EI}(1+\frac{b}{l})$ $\theta_B=-\frac{Pab}{6EI}(1+\frac{a}{l})$ $\delta_C=\frac{Pa^2b^2}{3EIl}$
② 	$\theta_B=\frac{Pl^2}{8EI}$ $\delta_B=\frac{5Pl^3}{48EI}$	⑧ 	$\theta_A=-\theta_B=\frac{Pl^2}{9EI}$ $\delta_C=\frac{23Pl^3}{648EI}$
③ 	$W=wl$ $\theta_B=\frac{wl^3}{6EI}=\frac{Wl^2}{6EI}$ $\delta_B=\frac{wl^4}{8EI}=\frac{Wl^3}{8EI}$	⑨ 	$W=wl$ $\theta_A=-\theta_B$ $=\frac{wl^3}{24EI}=\frac{Wl^2}{24EI}$ $\delta_C=\frac{5wl^4}{384EI}=\frac{5Wl^3}{384EI}$
④ 	$\theta_B=\frac{Ml}{EI}$ $\delta_B=\frac{Ml^2}{2EI}$	⑩ 	$\theta_A=\frac{Ml}{6EI}$ $\theta_B=-\frac{Ml}{3EI}$ $\delta_{max}=0.064\frac{Ml^2}{EI}$
⑤ 	$\theta_B=\frac{wl^3}{24EI}$ $\delta_B=\frac{wl^4}{30EI}$	⑪ 	$\theta_A=-\frac{Ml}{2EI}$ $\theta_B=\frac{Ml}{2EI}$ $\delta_C=-\frac{Ml^2}{8EI}$
⑥ 	$\theta_A=-\theta_B=\frac{Pl^2}{16EI}$ $\delta_C=\frac{Pl^3}{48EI}$	⑫ 	$\theta_A=\frac{7wl^3}{360EI}$ $\theta_B=-\frac{8wl^3}{360EI}$ $\delta_{max}=0.00652\frac{wl^4}{EI}$

$$\delta_B = +M_B(\cdot), \qquad \therefore \ \delta_B = \frac{wl^4}{8EI} = \frac{Wl^3}{8EI} \ (\text{下向き})$$

さらに，2・7図(d)のB点のせん断力は，このはりの全荷重に等しく

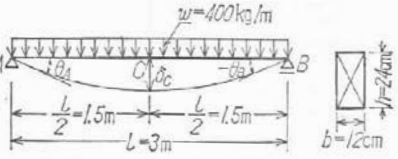
$$Q_B = \frac{wl^3}{6EI} = \frac{Wl^2}{6EI}$$

よって

$$\theta_B = +Q_B\uparrow\downarrow, \qquad \therefore \ \theta_B = \frac{wl^3}{6EI} = \frac{Wl^2}{6EI} \ (\text{時計回り})$$

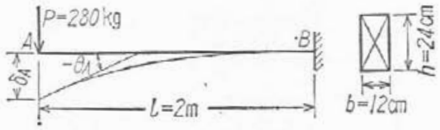
演　習　問　題

問題 1.　2・8図のように，単純ばりの全スパンに等分布荷重が作用しているとき，はりの中央C点のたわみ δ_C と，A，B支点のたわみ角 θ_A および θ_B を求めよ．ただし，はりのヤング係数を E=90000kg/cm^2 とする．



2・8 図

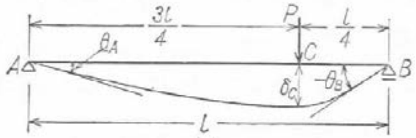
問題 2.　2・9図のように，片持ちばりの先端に集中荷重が作用しているとき，自由端A点のたわみ δ_A とたわみ角 θ_A とを求めよ．ただし，はりの材料はまつで

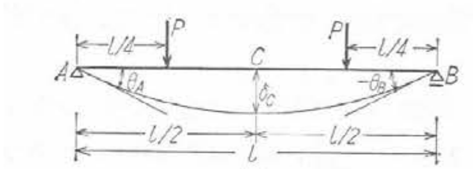


2・9 図

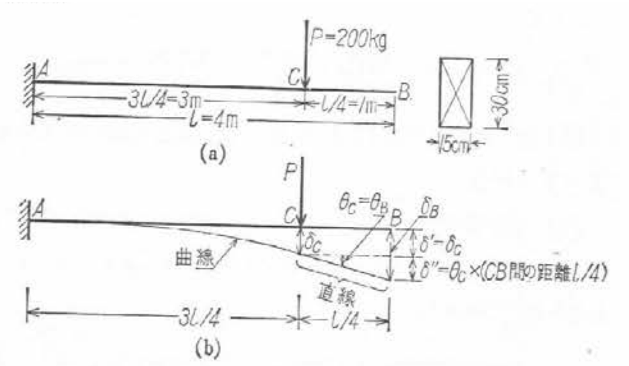
そのヤング係数は E=90000 kg/cm^2 とする．

問題 4.　2・11図(a)のようなはりの，A点，B点のたわみ角 θ_A，θ_B およびC点のたわみ δ_C を求めよ．





問題 5.　2·12図(a)のはりの，A，B点のたわみ角θ_A，θ_B，およびC点のたわみδ_Cを求めよ．

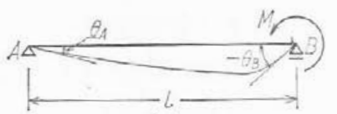


2·13 図

問題 6.　2·13図(a)の片持ちばりの，B点のたわみおよびたわみ角の式をみちびき，これに

数値を適用して計算せよ．ただし，はり材のヤング係数を $E=90000\ \mathrm{kg/cm^2}$ とする．

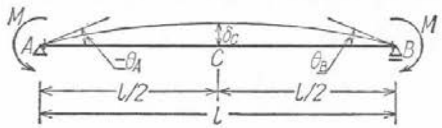
| 8



(a)

問題 8. 2·16 図(a) のはりの，A 点および B 点のたわみ角 θ_A，θ_B を求めよ．

問題 9. 2·17 図(a)のはりの，A，B 支点のたわみ角 θ_A，θ_B および C 点のたわみ δ_C を求めよ．



(a)